

花崗岩風化土における圧力水頭、 不飽和透水係数の簡易推定法

鈴木 隆 司

要 旨

森林の水源かん養機能、あるいは土砂崩壊防止機能を解析するに当って、森林土壌の圧力水頭 ϕ と、不飽和透水係数 k の関係を求めることが必要となるが、これには専用の試験設備だけでなく、多くの労力と時間を要することとなる。そこで、この関係を簡単に推定する方法として、採土円筒で採取した土壌を飽水状態に置いた後、素焼板によって吸水させ、吸水時間 t 、吸水速度 v 、体積含水率勾配 $\theta/\theta z$ 、ならびに重力水の含水量を測定し、計算で求める方法を考えた。

I. はじめに

森林のもつ水源かん養機能、あるいは土砂崩壊防止機能を定量的に把握することは、森林の公益的機能の根幹にかかわる重要な課題であるだけに、近年特に重要視されている。それには浸透水の森林土壌中での流動についての解析が必要であるが、その研究方法としては、現地に試験区を設け、降水量や土層内の圧力水頭、含水率の変化を測定すると共に、地表流、土中流を捕捉計測して、浸透水の土層中の流動量を降水量、土壌含水率、圧力水頭との関係から解析する方法と、現地の土壌を採取して、土壌の物理的性質を測定し、浸透水の土層中における流動現象を表現する微分方程式に、その数値を適用して数理物理学的に解く方法とが用いられている。前者の方法は現実の林地が複雑な地形、地質、土壌、植生などの条件を有しているため、多くの箇所でも測定し、その結果をもとに主として、帰納的な手法で解析を行うのに対し、後者の方法では得られた数値が現地での直接的な測定値でない欠点をもつが、一方各種の条件に対

応したモデルを想定することが可能であるため、演繹的な手法で電算機を利用し差分法で数値解を求めての解析が試みられている。したがって、マクロに考える場合、例えば一定地域を対象に、その地域の水源かん養機能、あるいは土砂崩壊防止機能の評価を行うような場合には、対象地域の地形解析、土壌調査をもとに、モデル化を行って後者の方法で浸透水の流動を表わす微分方程式を用いて数値解を求め、更に前者の方法による現地での測定を行って、総合的に解析を進める必要がある。この研究は、後者の方法を用いて計算によって解析を行なおうとする場合、パラメーターとして必要になる圧力水頭 ϕ と、不飽和透水係数 k を素焼板（以下吸水板と云う）を用いて簡易に推定する方法について考察したものである。なお、本報は昭和61年10月、高山市で開催された第35回日本林学会中部支部研究発表会で発表した内容について、1) 計算の過程で円筒内土壌の体積含水率勾配の実測値を用い、2) 吸水板自体の吸水能力を考慮して、重力水の吸水過程を計算から除外す

るなど、数点において、改良を加えたものである。

II. 方法

試料は愛知県西加茂郡小原村地内の崩壊地より採土円筒で採取したA層及びB層の土壌を用いた。採土円筒の大きさは、断面積 $A=100\text{cm}^2$ 、高さ $l=4\text{cm}$ である。

一方別に同じ場所から採取した土壌を2mmの篩にかけて、通過したもの（礫と植物の根を除いたもの）を直径9cmの濾紙を2つ折りにし袋状にした中に入れ（以下試料と呼ぶ）。採土円筒の上面と下面に入れた。次に円筒内土壌と試料と一緒に飽水させた後、吸水板の上に置き、吸水時間と吸水速度との関係を測定した。

III. 結果

1. 理論

通常吸水板を用いて土壌の吸水を行う実験は、土壌の細孔隙と粗孔隙との区分、あるいは毛管連絡切断含水量の測定に用いられている。これらは、いずれも吸水板によって土壌水の移動が停止する含水状態が、ほぼ $pF2.7$ ($\phi = -500\text{cmH}_2\text{O}$) に相当していることを利用している。この場合、吸水板の粗密によって脱水点の pF 値に大差がないこと、吸水板の含水比が50%以上になると吸水によって孔隙が飽和され吸水力が衰えること、吸水板によって吸水させる時間は、特別な場合を除いて24時間で充分なことが知られている。吸水時間 t_1 (分) と、吸水速度 $v (= \partial Q / \partial t_1, Q$ は吸水板による吸水量) との間には、横軸に $\log_{10} t_1$ を、縦軸に $\log_{10} v$ をとった場合、直線的な関係が認められる。これを更に、 $t_1 = \sim 100, 100 \sim 1000, 1000 \sim$ 、に分けて回帰直線を求めると、図-1に示すように一層明確に直線で表わすことができる。したがって両者の関係は、 $v = \alpha t_1^{-\beta}$ (α, β は常数) ……………① で示される。

一方採土円筒の上面及び下面に入れた試料からは体積含水率勾配を読み取る。試料に2mmの篩を

通過した土壌を用いたのは、土壌の保水現象が、殆んどこの粒徑によって決定されると考えて差支えないこと、試料が小さいので礫が入るとばらつきが大きくなることを考慮したためである。体積含水率 θ は、 $\theta = w \gamma$ (w は試料の含水率、 γ は試料とした土の絶乾単位体積重量、但し水の単位体積重量を1.0とした場合) である。したがって重直方向下向きを正にとって z で表わせば、体積含水率勾配 $\partial \theta / \partial z$ は、 $\partial \theta / \partial z = (\theta_2 - \theta_1) / l$ ……………② で示される。

ここで、 θ_1 は円筒上面に入れた試料の体積含水率、 θ_2 は下面に入れた試料の体積含水率である。次に吸水時間と体積含水率勾配との関係について見てみると図-2に示す関係が得られる。即ち、この場合 $\partial \theta / \partial z$ は吸水初期においては小さく、吸水時間が100分前後で、急激に増大して最大値を示し、その後次第に減少して1500分近くに達すると一定値に近づく、吸水初期の $\partial \theta / \partial z$ 値が小さいのは試料土の含水量が大きいのと比べ、吸水板の吸水能力が小さいためと考えられる。したがって円筒内土壌が、吸水板の吸引力 $pF2.7$ によって吸水され、その結果として土壌の物理性に対応した ϕ 値、及び v 値を示すのは、 $\partial \theta / \partial z$ が最大値を示した後の減小過程に入ってからであって、最大値を示す迄の低い $\partial \theta / \partial z$ 値は試料土の物理性よりも、むしろ吸水板の吸水能力($g/分$)による影響を強く受けているものと考えられる。そこで吸水板による吸水試験が終了後に、採土円筒を再び飽水させ、24時間砂の上に置いて重力水を脱水させ、圃場含水量 ($\approx pF1.8, \phi = -60\text{cmH}_2\text{O}$) に相当する脱水量を求めた。

この脱水量は、吸水板で吸水した場合の吸水時間30分に相当している。したがって吸水試験には、吸水開始30分以後の測定値を用いることにし、また図-2の曲線の最大値を、吸水時間30分迄、そのまま自然に延長して計算に用いた。このような

方法によって、測定した結果から①②を用いて、 v 及び $\partial \theta / \partial z$ を計算し、次節で誘導した計算式に、その数値を適用して、 ϕ の平均値 $\bar{\phi}$ 、及び k を求めた。なお計算に当たって、 ϕ の初期値 ϕ_0 をpF1.8に相当するものとし、 $\phi_0 = -60$ とした。

2. 計算式の誘導

採土円筒の上面、下面に連続の方程式を適用すると、 $-\partial v / \partial z = \partial \theta / \partial t$ ……………③が得られる。ここで、 $\phi = \phi_s + z$ において、 z の平均値は、 $l/2 = 2$ cmで土のサクションによる圧力水頭 ϕ_s に比べ小さいため、 $\phi = \phi_s$ とし、 k は実際には ϕ の関数であるが、ひとまず定数と仮定して③にダルシーの法則を適用すると、

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$\frac{k \frac{\partial \phi}{\partial z}}{\frac{\partial \theta}{\partial z}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\frac{k \frac{\partial \phi}{\partial z}}{\frac{\partial \theta}{\partial z}} = \frac{v/A}{\frac{\partial \theta}{\partial z}} = D(\text{拡散係数}) = a^2 \dots\dots\dots ④$$

$$\therefore a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots ⑤$$

となって熱伝導の微分方程式が導かれる。 ϕ は飽水状態の $\phi = 0$ から吸水板によって吸水され、 t_1 の経過と共に減少するものと考え、 t_1 に対応して、 a^2 が実験的に①②④から、或る数値に定まり、その場合 k を含む a^2 は定数となって、方程式⑤は定められた初期条件、境界条件のもとに解くことが可能になる。初期条件は、 $\phi_{t=0} = \phi_0 = f(z)$ 、境界条件は図-3に示すように、円筒内土壌が上下両面で、一定の圧力水頭 $\bar{\phi}_0$ 、 $\bar{\phi}_l$ に接しているものとする、 $z = 0$ は空間との接触面であり、 $z = l$ は吸水板との接触面である。円筒内土壌と吸水板との間の水分伝導率を K とすると、 $K_0 = 0$ である。円筒内土壌から吸水

れる速度は、円筒内土壌が有する圧力水頭と接触面の圧力水頭との差に比例して、

$$\left. \begin{aligned} k(\partial \phi / \partial z) |_{z=0} &= K_0 \{ \phi |_{z=0} - \bar{\phi}_0 \} \\ k(\partial \phi / \partial z) |_{z=l} &= K_l \{ \phi |_{z=l} - \bar{\phi}_l \} \end{aligned} \right\} \dots\dots ⑥$$

と置くことができる。また常に $\phi |_{z=l} = \bar{\phi}_l$ とすると、 $(k/K_l)(\partial \phi / \partial z) |_{z=l} = \phi |_{z=l} - \bar{\phi}_l = 0$ 、したがって、 $K_l \rightarrow \infty$ でなければならない。⑥は非斉次であるから、斉次の条件に直すため、任意の定数 r 、 r_1 を導入して

$$\phi(z, t) = \phi(z, t) + r + r_1 z \dots\dots\dots ⑦$$

と置くと、⑥は

$$k(\partial \phi / \partial z) |_{z=0} = K_0 \phi |_{z=0} + K_0 r - k r_1 - K_0 \bar{\phi}_0$$

$$k(\partial \phi / \partial z) |_{z=l} = K_l \phi |_{z=l} + K_l r + r_1 (K_l l - k) - K_l \bar{\phi}_l$$

したがって、斉次であるためには、

$$\left. \begin{aligned} K_0 r - k r_1 &= K_0 \bar{\phi}_0 \\ K_l r + r_1 (K_l l - k) &= K_l \bar{\phi}_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑧$$

が成り立たなければならない。 $K_0 = 0$ から

$$r_1 = 0 \quad \therefore r = \bar{\phi}_l \quad \text{よって} \quad \phi(z, t) = \phi(z, t) + \bar{\phi}_l \dots\dots\dots ⑨$$

境界条件は、 $\phi(z, t)$ に対して

$$\left. \begin{aligned} k(\partial \phi / \partial z) |_{z=0} &= K_0 \phi |_{z=0} \\ k(\partial \phi / \partial z) |_{z=l} &= K_l \phi |_{z=l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑩$$

となって斉次に変形できる。 ϕ の初期条件は $\phi |_{t=0} = \phi_0 - \bar{\phi}_l = f_1(z) \dots\dots\dots ⑪$

⑨から⑤の解を求めることは、方程式

$$\partial \phi / \partial t = a^2 (\partial^2 \phi / \partial z^2) \dots\dots\dots ⑫$$

を $0 < z < l$ と、 t について初期条件⑪と、境界条件⑩を満足する $\phi(z, t)$ を求める問題に帰着する。⑫の特殊解はフーリエの方法によって、

$$\phi(z, t) = (a \cos \lambda z + \beta \sin \lambda z) \exp(-\lambda^2 a^2 t)$$

$$\partial \phi / \partial z = -\lambda (a \sin \lambda z - \beta \cos \lambda z) \exp(-\lambda^2 a^2 t)$$

$$\alpha / \beta = k \lambda / K_0 \quad \text{同様に、} \quad \alpha / \beta = (k \lambda -$$

$K_2 \tan \lambda \ell) / (k \lambda \tan \lambda \ell + K_2)$ したがって、 $\tan \lambda \ell = \{k \lambda (K_0 - K_2)\} / (K_0 K_2 + k^2 \lambda^2)$

$K_0 = 0, K_2 \rightarrow \infty$ だから $\cot \lambda \ell = 0$ 、
 $\therefore \lambda \ell = \pi \{(2n+1)/2\}$
 $\lambda = \lambda_n = \pi(2n+1)/2\ell$ 但し、 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ となって、それぞれの固有値 λ_n には、固有の係数 α_n, β_n が対応することとなる。したがって、

$$\phi_n(z, t) = \{\alpha_n \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) + \beta_n \sin((2n+1)\pi z / (2\ell))\} \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t / (4\ell^2)\} \dots \dots \dots \textcircled{13}$$

$$\partial \phi / \partial z = -\{(2n+1)\pi / (2\ell)\} \{\alpha_n \sin((2n+1)\pi z / (2\ell)) - \beta_n \cos((2n+1)\pi z / (2\ell))\} \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t / (4\ell^2)\} \dots \dots \dots \textcircled{14}$$

⑩の条件式が成立するためには、 $z=0$ では⑭から $\beta_n = 0$ でなければならない ($\because K_0 = 0$)。

また $z = \ell$ では、 $K_2 \phi_n |_{z=\ell}$ が有限な値をもつには、 $\phi_n |_{z=\ell} = 0$ 、同様に⑬から、 $\beta_n = 0$ でなければならない ($\because K_2 \rightarrow \infty$)。したがって、 $\phi_n(z, t) = \alpha_n \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t / (4\ell^2)\}$

解は、 $\phi_n(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \exp\{-(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t / (4\ell^2)\} \cos((2n+1)\pi z / (2\ell))$
 初期条件は、 $\phi_n |_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) = f_1(z)$

したがって $f_1(z)$ を展開すると、

$$f_1(z) = \alpha_0 \cos((\pi z) / (2\ell)) + \alpha_1 \cos((3\pi z) / (2\ell)) + \alpha_2 \cos((5\pi z) / (2\ell)) \dots \dots \dots + \alpha_m \cos((2m+1)\pi z / (2\ell)) + \dots \dots \dots + \alpha_n \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) + \dots \dots \dots$$

両辺に $\cos((2n+1)\pi z / (2\ell))$ を乗じ $\int_0^\ell f_1(z) \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) dz$ を求めると、一般項は、 $\alpha_n \int_0^\ell \{\cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) \cos((2m+1)\pi z / (2\ell))\} dz = 0$ となって $\alpha_n \int_0^\ell \{\cos((2n+1)$

$\pi z / (2\ell)\}^2 dz = \alpha_n \ell / 2$ の項だけが残る。

$$\therefore \int_0^\ell f_1(z) \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) dz = \alpha_n \ell / 2$$

$$\alpha_n = (2/\ell) \int_0^\ell f_1(z) \cos((2n+1)\pi z / (2\ell)) dz \quad \text{また} \textcircled{7} \text{ から } \phi = \phi_0 - \bar{\phi}_2 \textcircled{11} \text{ から } f_1(z) = \phi_0 - \bar{\phi}_2 \text{ だから } \alpha_n = 4(-1)^n (\phi_0 - \bar{\phi}_2) / ((2n+1)\pi)$$

したがって⑤の解として

$$\phi = \bar{\phi}_2 + \frac{4(\phi_0 - \bar{\phi}_2)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2\ell} \exp\left\{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4\ell^2}\right\} \dots \dots \dots \textcircled{15}$$

が成り立つ。

円筒内土壌の ϕ の推定値を、 ϕ の z 方向の平均値 $\bar{\phi}$ であらわすと、

$$\bar{\phi} = \frac{\bar{\phi}_2}{\ell} \int_0^\ell dz + \frac{4(\phi_0 - \bar{\phi}_2)}{\pi \ell} \int_0^\ell \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2\ell} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4\ell^2}\right) \right\} dz = \bar{\phi}_2 + \frac{8}{\pi^2} (\phi_0 - \bar{\phi}_2) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4\ell^2}\right) \right\}$$

なお、 $\bar{\phi}_2 = -500, \phi_0 = -60$ なので

$$\bar{\phi} = \frac{3520}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4\ell^2}\right) \right\} - 500 \dots \dots \dots \textcircled{16}$$

また⑮から

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{2(\phi_0 - \bar{\phi}_2)}{\ell} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4\ell^2}\right) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2\ell} \right\}$$

$\partial \phi / \partial z$ の円筒内平均値として、 $z = \ell/2$ の位置の値を用いることとし、 $\bar{\phi}_2 = -500, \phi_0 =$

-60 を代入すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=l/2} = -440 \frac{\sqrt{2}}{\ell} \left\{ \exp(-\eta) - \exp(-9\eta) - \exp(-25\eta) + \exp(-49\eta) + \dots \right\} \quad \text{.....⑰}$$

但し、 $\eta = \frac{\pi^2 a^2 t}{4 \ell^2}$

次に⑰を用いて $v = k(\partial \phi / \partial z) = \alpha t_1^{-\beta}$

/Aから k (cm/sec)は $k = \frac{\alpha t_1^{-\beta}}{60A} \frac{\partial \phi}{\partial z}$
⑱

なお、この場合pF1.8の吸水に対応する吸水板による吸水時間は30分なので、 $t = t_1 - 30$ で求めた。

IV. 考察

1 以上記したように、吸水板による吸水試験と、採土円筒内土壌の重力水の測定から、④⑩⑰⑱を用いて、 ϕ と k の関係を計算することができる。横軸に ϕ 、縦軸に k をとって、計算で求めた ϕ 、 k と、別に採土円筒に水頭を加え飽和透水係数を求めて図示すると、図-4の関係を求めることができる。

2 採土円筒内土壌の絶乾重量と、吸水板による吸水量とから ϕ と、 θ との関係が得られる。したがって対象とする現場の土壌の θ を測定することによって、 θ に対応する ϕ と k を求めることが可能になり、リチャーズの式、あるいはフリーズの式(など土壌中の流動現象を表わす微分方程式)を用いて、浸透水の土層内の流動現象について解析することができる。

3 この研究では、重力水の脱水方法として飽水状態にある採土円筒を24時間砂の上に置いて自然に脱水させる方法を探ったが、精度を上げるには、砂柱法によって $\phi = -60$ の状態に置いて脱水量を測定するのが適当と考える。

更に、その場合には今迄記してきた、この方法を $\phi_e = -60$ 、 $\phi_0 = 0$ 、 $t_1 = t$ として適用することによって、 $0 > \phi \geq -60$ に対応する k を求めることができるものと考えられる。

V. 引用文献

- (1) 鈴木隆司:花崗岩風化土における圧力水頭、不飽和透水係数の簡易推定法. 35回日林中支講: 239~242, 1987
- (2) 土壤物理測定法委員会: 土壤物理測定法. 121~124, 475~476, 養賢堂, 1975
- (3) 筒井孝胤 訳: 数理物理入門. 127~145, 東京図書, 1966

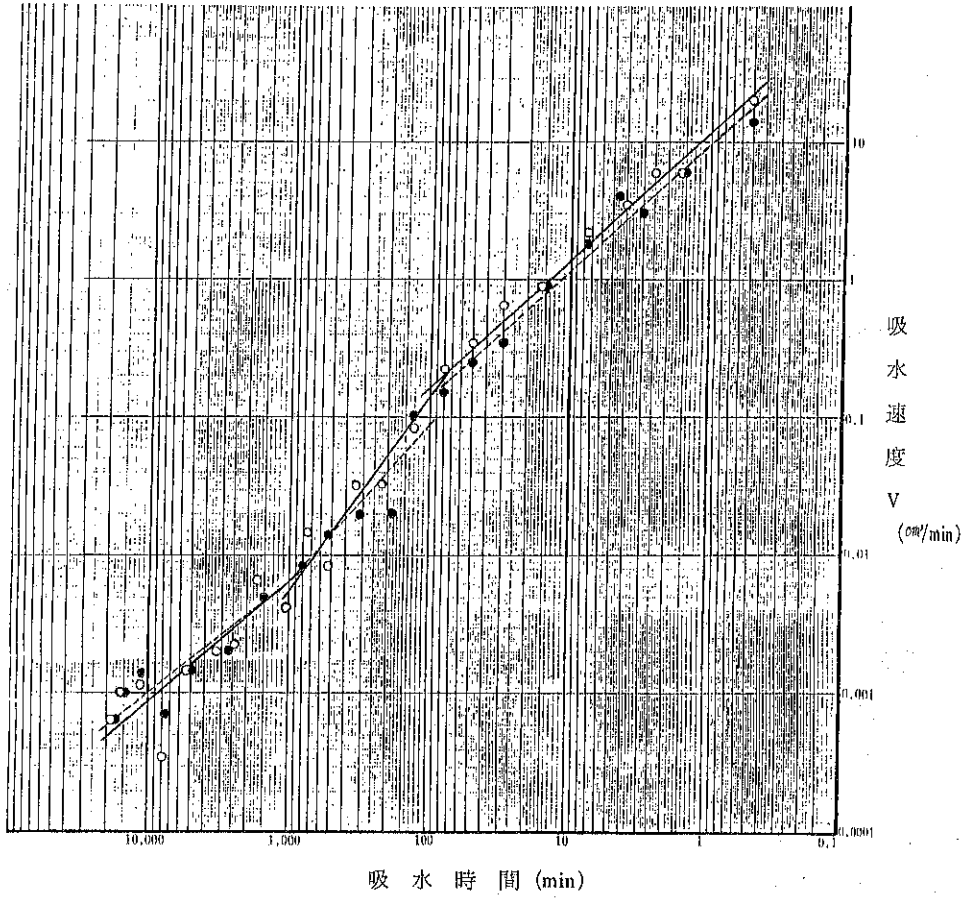


図-1 吸水時間と吸水速度の変化

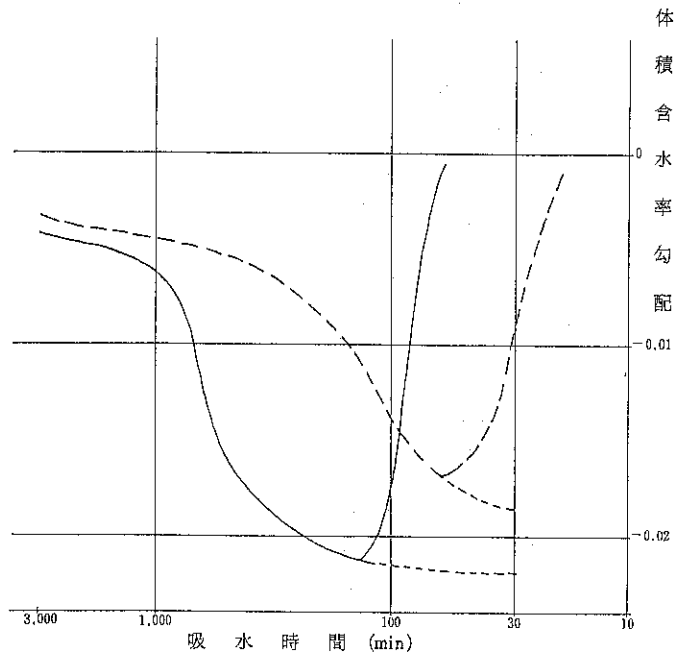


図-2 吸水時間と体積含水率勾配の変化

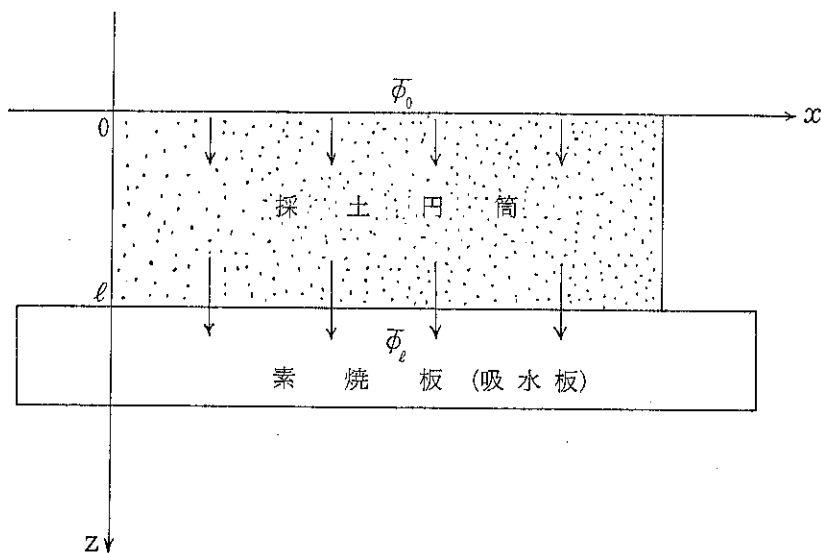
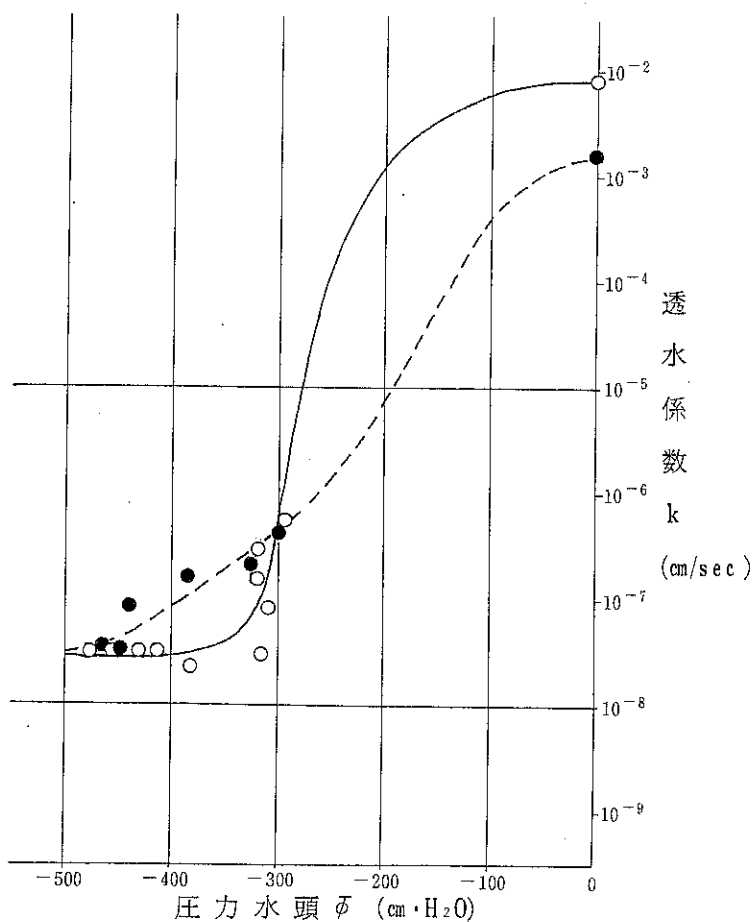


図-3 素焼板(吸水板)による吸水



凡 例

—○— A層からの採取土

—●— B層からの採取土

図-4 圧力水頭 ϕ と透水係数 k の関係

